Original research / Artículo original / Pesquisa original - Tipo 1

Options valuation analysis of the shares of Ecopetrol and Pacific Exploration between June 2013 and June 2016

Álvaro Javier Cangrejo MSc(c). / alvaro.cangrejo@correounivalle.edu.co

Christian Camilo Cortés, MSc. / christian.cortes@usco.edu.co

Universidad Surcolombiana, Neiva-Colombia

ABSTRACT In this paper, we analyze the environment and the dynamics of the Black-Scholes model starting from a stochastic differential equation that explains the evolution of the future prices of an asset. With these defined guidelines, the data obtained by the daily closing prices between June 2013 and June 2016 of the shares of Ecopetrol and Pacific Exploration are normalized, by means of a Box-Cox transformation, to determine the volatility of each of them and apply this model to calculate the value of the asset with fixed time, and thus determine which of the two oil companies have a lower risk at the time of investing.

KEYWORDS Black-Schole Model; fluctuation; European option; Ito lemma; volatility.

Análisis de valoración de opciones a las acciones de Ecopetrol y Pacific Exploration entre junio de 2013 y junio de 2016

RESUMEN En este trabajo se analiza el entorno y la dinámica del modelo de Black–Scholes partiendo de una ecuación diferencial estocástica que explica la evolución de los precios futuros de un activo. Con estos lineamientos definidos, se normalizan los datos obtenidos por los precios de cierre diarios comprendido entre junio de 2013 y junio del 2016 de las acciones de Ecopetrol y Pacific Exploration, mediante una transformación Box-Cox, para determinar la volatilidad de cada uno de ellos y aplicar dicho modelo para calcular el valor del activo con tiempo fijado, y así determinar cuál de las dos empresas petroleras tienen un menor riesgo al momento de invertir.

PALABRAS CLAVE Modelo de Black-Scholes; fluctuación; opción europea; lema de Ito; volatilidad.

Análise de valorização de opções sobre acções da Ecopetrol e da Pacific Exploration entre Junho de 2013 e Junho de 2016

RESUMO Neste trabalho é analisado o ambiente e a dinâmica do modelo de Black-Scholes a partir de uma equação diferencial estocástica que visa explicar a evolução dos preços futuros de um ativo. Com estes lineamentos definidos, são normalizados os dados obtidos pelos preços de fechamento diários entre Junho 2013 e Junho 2016 das ações da Ecopetrol e da Pacific Exploration , através da transformação Box-Cox para determinar a volatilidade de cada um e aplicar este modelo para calcular o valor do ativo em tempo fixo, e determinar qual das duas companhias petrolíferas tem um menor risco de investimento.

PALAVRAS-CHAVE Modelo de Black-Scholes; flutuação; opção europeia; lema de Itō; volatilidade.

I. Introduction

In recent years, capital and derivatives financial markets have experienced a huge scientific and technological growth. Therefore, industries have undergone exponential growth worldwide. This period of boom has driven large industries to develop and implement mathematical models in order to make the best financial decision to improve profits. Therefore, Asset Valuation Theory begins with the Black – Scholes model implementation, considered as a reference for financial engineering development, in which agents value and cover financial options.

Since its introduction, this theory has been studied, analyzed, and contrasted in real and future markets of options around the world. The Black - Scholes theory has been rigorously studied and analyzed, not only because of its flexibility and application degree, mainly because most of the ideas of Modern Valuation Theory are already found in it. So, this model is a basis for numerous generalizations and extensions by academics and finance professionals.

This model presents some complexity in its application due to the difficult of logic understanding and mathematic tools used. In this sense, it is necessary the first approach from Differential Equations (Garcia, 2008; Farlow, 1993) and Probability Distributions (Elliott & Kopp, 1999). Thus, it is possible to find a model application in particular cases. Mainly, increasing or decreasing fluctuations or movements over time, caused by the closing prices of Ecopetrol shares and Pacific Rubiales, which are two oil companies with a great economic impact for the financial development of the company. A country, both listed on the Colombian Stock Exchange [BVC].

This paper analyzes data about fluctuations between daily closing prices of the shares, belong to two of the most important oil companies in Colombia and Latin America: Ecopetrol and Pacific, during June 2013 and June 2016. After this analysis, the Black - Scholes model was used to determine the significant differences between the shares valuation of these companies with the purpose of making the best decision about an investment. Hence, this study presents a stochastic equation that describes the price evolution of an asset over time, which will later be used to derive the Black - Scholes equation and make a database descriptive study in order to calculate the parameters, mainly its volatility, through a Box-Cox transformation. As a result, a normality in the study data is guaranteed in the Black-Scholes model using a programming code in R.

I. Introducción

En los últimos años, los mercados financieros de capitales y derivados han experimentado un enorme crecimiento científico y tecnológico, de tal manera que las industrias han tenido un crecimiento exponencial a nivel mundial. Este periodo de apogeo ha impulsado a las grandes industrias a desarrollar e implementar modelos matemáticos que permitan tomar la mejor decisión financiera para aumentar sus ganancias. De esta forma, la teoría de valorización de activos comienza con la implementación del modelo de Black – Scholes, considerado como punto de referencia para el desarrollo de la ingeniería financiera, manera en que los agentes valúan y cubren opciones financieras.

Desde su presentación, esta teoría ha sido estudiada, analizada y contrastada en los mercados reales y futuros de opciones en todo el mundo. La teoría de Black – Scholes ha sido rigurosamente estudiada y analizada, no solo por su flexibilidad y grado de aplicación, sino porque la mayor parte de las ideas de la teoría moderna de valoración ya se encuentran originalmente en ella, de hecho, este modelo ha servido de base para numerosas generalizaciones y extensiones por parte de académicos y profesionales de las finanzas.

Este modelo presenta cierta complejidad en su aplicación por la dificultad de entender su lógica debido a las herramientas matemáticas que utiliza. En este sentido, se hace necesario, primero aproximarse a ella desde la Matemática Financiera (Kozikowski, 2007; Serrano & Villareal, 1993), las Ecuaciones Diferenciales (Garcia, 2008; Farlow, 1993) y las Distribuciones de Probabilidad (Elliott & Kopp, 1999) para luego aplicar el modelo a casos particulares; en el nuestro, a las fluctuaciones o movimientos a través del tiempo, ya sea de una forma creciente o decreciente, generada por los precios de cierre de las acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales, dos empresas petroleras de gran impacto económico para el desarrollo financiero del país, ambas cotizantes en la Bolsa de Valores de Colombia [BVC].

En este trabajo se analizan los datos referente a las fluctuaciones entre los precios diarios de cierre de las acciones, entre junio de 2013 y junio de 2016, de dos de las empresas petroleras más importante en Colombia y Latinoamérica: Ecopetrol y Pacific. Después de dicho análisis, se aplica el modelo de Black – Scholes para determinar las diferencias significativas que existen entre la valorización en las acciones de estas empresas y así tomar la mejor decisión al momento de realizar una inversión. Para ello, se presenta una ecuación estocástica que describe la evolución del precio de un activo a través del tiempo, que posteriormente será usada para deducir la ecuación de Black – Scholes y se hace el estudio descriptivo de la base de datos para finalmente calcular los parámetros, especialmente la volatilidad de cada uno de ellos, mediante una transformación Box-Cox, para garantizar la normalidad en los datos de estudio, en el modelo de Black – Scholes usando un código de programación en R.

II. Preliminares

A. Evolución del precio de un derivado

Consideremos el precio de un derivado, con iterado de tiempo i, dado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\sigma\Delta X_i$ el cambio en el precio del derivado, donde σ es la desviación estándar o volatilidad que controla el tamaño de paso y ΔX_i una variable estocástica que describe el resultado para cada iterado i. Supongamos que dicha variable sea independiente, $\Delta x = \sigma\Delta X$, y el incremento en x es tan pequeño que puede ser reemplazado por $\Delta x \rightarrow \mathrm{d}x$, similarmente $\Delta X \rightarrow \mathrm{d}X$.

Consideremos una ecuación diferencial estocástica que describe la evolución del precio de dicho derivado de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}X\,, \tag{1}$$

donde dX es un proceso de Wiener, y por tanto, el responsable de la incerteza de la variable aleatoria x. Dicho proceso en cada subintervalo Δx se distribuye normal esto es,

$$p[\Delta x] = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

con media igual a cero y una desviación estándar igual a $(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$. Al considerar estos supuestos, dt corresponde a un pequeño incremento en el tiempo que es, sin embargo, suficientemente grande como para que el teorema central del límite sea válido; es decir, dt es, de alguna manera, suficientemente grande para $n\rightarrow\infty$ iteraciones con paso del tiempo.

Hasta ahora hemos considerado los procesos del precio de un derivado cuando están conformados por variables estocásticas. En la teoría financiera, una variable determinística a menudo se incluye para dar una apertura a una posible tendencia total en el mercado, similar al retorno libre del riesgo. Por lo tanto, (1) se convierte en:

$$\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}X + \mu\mathrm{d}t, \tag{2}$$

donde μ es un término de sesgo determinista, es decir, una medida de crecimiento promedio del precio del derivado. Integrando (2) obtenemos:

$$x(t) = x(0) + \mu t + \phi\sigma\sqrt{x}\,, \tag{3}$$

donde ϕ es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media igual a cero y varianza igual a uno, esto es, $\phi\sim N[0,1]$. La ecuación (3) permite a x cambiar de signo, por lo tanto, podemos considerar los precios del derivado como fracciones, es decir:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma\mathrm{d}X + \mu\mathrm{d}t, \tag{4}$$

que al momento de integrar da como resultado:

$$x(t) = x(0) + \mathrm{e}^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\phi\sigma\sqrt{x}}$$

II. Preliminaries

A. Evolution of derivative pricing

Taking into account the price of a derivative with iterated timei, given by $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ and $\sigma\Delta X_i$ the change in the price of a derivative, where σ is the standard derivation or volatility that controls the step size and ΔX_i is a stochastic variable that describes the result for each iteratei. Suppose that this variable is independent $\Delta x = \sigma\Delta X$, and the increase in x is so small that can be replaced by $\Delta x \rightarrow \mathrm{d}x$, similarly $\Delta X \rightarrow \mathrm{d}X$.

Considering a stochastic differential equation that describes the evolution of derivative pricing as follows:

$$\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}X\,, \tag{1}$$

where dX is a Wiener Process. It is responsible for the uncertanity of the random variable x. The above process in each subinterval Δx presents a normal distribution. That is,

$$p[\Delta x] = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

with mean equal to zero and a standard deviation equal to $(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$. Taking these assumptions into account, dt corresponds to a small increase, which is enough for the central limit theorem be valid; that is, dt, is in some way, $n\rightarrow\infty$ iterations over time.

So far, the processes of derivative pricing are considered once they are conformed by stochastics variables. In financial theory, a deterministic variable is often included to give an opening to a possible total market trend, similar to the risk free return. Therefore, (1) becomes:

$$\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}X + \mu\mathrm{d}t, \tag{2}$$

where μ is a term of deterministic bias, that is, a measure of average growth of derivative pricing. Integrating (2) results in:

$$x(t) = x(0) + \mu t + \phi\sigma\sqrt{x}\,, \tag{3}$$

where ϕ is a random variable that is normally distributed with mean equal to zero and variance equal to one, that is, $\phi\sim N[0,1]$. Equation (3) allows tox change sign. Therefore, the prices of the derivatives as fractions are considered into account, ie:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma\mathrm{d}X + \mu\mathrm{d}t, \tag{4}$$

which at the time of integration causes:

$$x(t) = x(0) + \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \phi\sigma\sqrt{x}}$$

B. Black – Scholes Equation

The deduction and solution of Black - Scholes Equation for the valuation of options given by Castillo (2012) is presented below. Our starting point is the stochastic differential equation given by (4), which describes the price movement of a derivative that contains a random variable and a deterministic term

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\,,$$

where the random variable dX is a Wiener process that presents normal distribution with zero mean and variance dt. Suppose that at the moment t, the current value of the option is V and the current value of the derivative is x, ie, V a function of x and of t, ie, $V(x,t)$. If these were usual functions, it would use:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \cdots\,, \qquad (5)$$

where the ellipses are terms of higher order with respect to dx and dt. Even, without higher-order terms, Eq. (5) works for those deterministic functions. However, things are more complicated with stochastic functions. Given a value of t, it is possible to make a probabilistic statement about the value of x, and, therefore V. Through the Ito lemma, the correct way to write equation (5), given that x is a stochastic variable, is:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \cdots\,, \qquad (6)$$

where the points are terms of higher order. If (4) is replaced into (6) the following equation is obtained:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\mathrm{d}t) + \frac{\partial V}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\mathrm{d}t)^2, \qquad (7)$$

where the ellipses that represent the higher order terms are removed.

On the other hand, if the following expression belong to equation (7) is considered with the purpose of expansion and terms analysis,

$$(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\,\mathrm{d}t)^2 = x^2\,\sigma^2\,(\mathrm{d}X)^2 + 2x^2\sigma\mu(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}t) + x^2\mu^2\,(\mathrm{d}t)^2,$$

B. Ecuación de Black - Scholes

Presentamos la deducción y solución de la ecuación Black - Scholes para la valoración de opciones dado por Castillo (2012). Nuestro punto de partida es la ecuación diferencial estocástica dada por (4) que describe el movimiento del precio de un derivado que comprende de una variable aleatoria y un término determinístico

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\,,$$

donde la variable aleatoria dX es un proceso de Wiener que tiene función de distribución normal con media cero y varianza dt. Supongamos que en el momento t, el valor actual de la opción es V y el valor actual del derivado es x, esto es, V una función de x y de t, es decir, $V(x,t)$. Si estas fueran funciones habituales, usaríamos:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \cdots\,, \qquad (5)$$

donde los puntos suspensivos son términos de orden superior con respecto a dx y dt. Incluso, sin los términos de orden superior, la ecuación (5) funciona para aquellas funciones que son deterministas. Sin embargo, en el caso de funciones estocásticas las cosas son más complicadas. Dado un valor de t, sólo podemos hacer una afirmación probabilística sobre el valor de x, y, por tanto de V. Usando el lema de Ito, la forma correcta escribir la ecuación (5), dado que x es una variable estocástica, es:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \cdots\,, \qquad (6)$$

donde los puntos son términos de orden superior. Si reemplazamos (4) en (6) obtenemos:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\mathrm{d}t) + \frac{\partial V}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\mathrm{d}t)^2, \qquad (7)$$

donde retiramos los puntos suspensivos que representan los términos de orden superior.

Por otro lado, si tomamos de la ecuación (7) la siguiente expresión para expandirla y analizar sus términos,

$$(x\sigma\mathrm{d}X + x\mu\,\mathrm{d}t)^2 = x^2\,\sigma^2\,(\mathrm{d}X)^2 + 2x^2\sigma\mu(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}t) + x^2\mu^2\,(\mathrm{d}t)^2,$$

deducimos lo siguiente:

- para el primer término, esto es $x^2\,\sigma^2\,(\mathrm{d}X)^2$, suponemos que el proceso estocástico dX es un camino aleatorio asociado a una función de distribución de probabilidad cuya desviación estándar es igual a $(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto, $(\mathrm{d}X)^2$ es de orden dt;

- para el segundo y tercer términos, esto es $2x^2\ \sigma\mu$(“d” X) (dt) y $x^2\ \mu^2$ (dt)^2, tiene una clara dependencia de orden superior más alto que dt, por lo tanto estos términos se excluyen;

así, una forma simplificada de la ecuación (7) es:

$$(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t)^2 = x^2\ \sigma^2 \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Colocando la ecuación (8) en (7) tenemos:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \left[\sigma x \frac{\partial V}{\partial x}\right]\mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t\,, \tag{9}$$

pero esta es una ecuación estocástica para el precio de la opción $V(x,t)$, es decir, dado el tiempo t y el precio del derivado, no podemos obtener un valor único para el precio del derivado V. El objetivo es obtener un precio único para la opción. Para ello, suponemos un portafolio formado por una opción y una cantidad Δ del activo subyacente. El valor de nuestro portafolio en el tiempo t es:

$$\Pi(x,t) = V(x,t) - \Delta(x,t)x(t)\,,$$

y el valor del portafolio entre el tiempo de t y t + dt está dado por:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \mathrm{d}V - \Delta \mathrm{d}x \quad , \tag{10}$$

donde dx representa los precios de activos, dV el precio de la opción y dΠ el valor de la función de portafolio. El importe del activo que tenemos en el momento t no cambia entre el tiempo de t y t + dt dado que no es importante saber qué va a pasar con el precio de los activos $x(t)$; así, Δ se mantiene constante en el intervalo de tiempo t + dt. Reemplazando la ecuación (9) en (10) obtenemos:

$$\mathrm{d}\Pi = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t - \Delta \mathrm{d}x\ , \tag{11}$$

y la ecuación (4) en (11) para:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\ \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t - \Delta x[\sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\,]$$

que simplificando tenemos:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right]\mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right]\mathrm{d}t\,. \tag{12}$$

El factor $\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right]$ es un término importante debido a que controla el elemento estocástico en el portafolio dΠ y por lo tanto, el riesgo del mismo. A pesar que la ecuación (12) parece seguir un proceso estocástico, podemos eliminar este término si diseñamos la siguiente condición en cada momento t:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x}\,. \tag{13}$$

Suponemos que la condición en la ecuación anterior se cumple en cada valor de t. Entonces la ecuación (12) se convierte en:

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right]\mathrm{d}t\,. \tag{14}$$

the following analysis can be deduced:

- for the first term, that is $x^2\ \sigma^2$ (dX)^2, the stochastic process dX is a random way associated with a probability distribution function whose standard deviation is equal to (dt)$^{\frac{1}{2}}$, thus, (dX)^2 belong to the order dt;
- for the second and third terms, that is $2x^2\ \sigma\mu$(dX) (dt) and $x^2\ \mu^2$ (dt)^2, presents a clear higher-order dependence above dt, therefore these terms are excluded;

Hence, a simplified form of equation (7) is:

$$(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t)^2 = x^2\ \sigma^2 \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Integrating equation (8) into (7) it is possible to obtain:

$$\mathrm{d}V(x,t) = \left[\sigma x \frac{\partial V}{\partial x}\right]\mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t\,, \tag{9}$$

however this is a stochastic equation for the price of the option $V(x,t)$, that is, given the time t and the derivative pricing, it is not possible to obtain a single value for the price of a derivative V. The aim is to obtain a unique price for the option. For this reason, this study assumes a portfolio consisting of an option and an amount Δ of the underlying asset. The value over time of this portfolio t is:

$$\Pi(x,t) = V(x,t) - \Delta(x,t)x(t)\,,$$

and the portfolio value between the time of t and t+dt is given by:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \mathrm{d}V - \Delta \mathrm{d}x \quad , \tag{10}$$

where dx represents the prices of assets, dV the price of the option, and dΠ the value of the portfolio function. The amount of the asset obtained in at moment does not change between the time oft and t+dt since it is not important to know what will happen with the price of the assets $x(t)$; thus, Δ it remains constant in the time interval t+dt . Replacing equation (9) into (10) is possible to obtain:

$$\mathrm{d}\Pi = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t - \Delta \mathrm{d}x\ , \tag{11}$$

and the equation (4) into (11) for:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\ \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t - \Delta x[\sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\,]$$

simplifying:

$$\mathrm{d}\Pi\ = \sigma x\ \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]\ \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]\mathrm{d}t - \Delta x[\sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\,]$$

The factor $\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right]$ is an important term due to its control over the stochastic element in the portfolio $\mathrm{d}\Pi$ and therefore, its risk. Although equation (12) seems to follow a stochastic process, it is possible to delete this term by designing the following condition at each momentt :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{13}$$

Assuming that the condition in the above equation is true for each value oft. Then, equation (12) results in:

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right] \mathrm{d}t. \tag{14}$$

Substituting in equation (13), (14) is:

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{15}$$

which is a completely deterministic equation for the portfolio value in each timet. In other words, there is no random term dX that affects the value of the portfolio, and its risk has been eliminated.

Considering the underlying asset has not been acquired. Instead, the choice is the risk option where the capital has been invested in a bank. In this case, our portfolio increases the value during the same period of time $t \to t + \mathrm{d}t$, by a quantity:

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi \mathrm{d}t,$$

where r represents the interest rate. Introducing this equality in equation (15) results:

$$r\Pi \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{16}$$

and substituting equations (10) and (13) into (16):

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t. \tag{17}$$

The above result must be valid for the timetduring the life pf the option. Thus, multiplying Δdt on both sides of equation (17) allow to obtain:

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right],$$

equivalent to:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0,$$

where x represents the stock value, t the time, V the price of an option, r the interest rate of the debt market, and σ the volatility of the stock, standard measure of the share price logarithms. This equation is known as the

Sustituyendo en la ecuación (13), (14) tenemos:

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{15}$$

que es una ecuación completamente determinista para el valor del portafolio para cada tiempo t. En otras palabras, no existe un término aleatorio dX que afecte el valor del portafolio, y su riesgo ha sido eliminado.

Consideremos que no hemos adquirido el activo subyacente, y en su lugar hemos elegido la opción de riesgo donde el capital ha sido invertido en un banco. En este caso, nuestro portafolio aumenta el valor durante el mismo período de tiempo $t \to t + \mathrm{d}t$, por una cantidad:

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi \mathrm{d}t,$$

donde r representa la tasa de interés. Aplicando dicha igualdad en la ecuación (15) tenemos:

$$r\Pi \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{16}$$

y sustituyendo las ecuaciones (10) y (13) en (16) resulta:

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t. \tag{17}$$

Este resultado debe ser válido para todo tiempo t durante la vida de la opción, por lo tanto, multiplicando por Δdt en ambos lados de la ecuación (17) da la ecuación:

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right],$$

equivalente a:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0,$$

donde x representa el valor de la acción, t el tiempo, V el precio de una opción, r el tipo de interés del mercado de deuda, y σ la volatilidad de la acción, medida estándar de los logaritmos de la cotización de la acción. A esta ecuación se le conoce como el modelo de Black- Scholes. Por otro lado, para resolver esta ecuación tenemos que conocer las condiciones de contorno que definen qué tipo de opción estamos considerando. Por ejemplo, para una opción europea de la venta de las acciones en una fecha futura, las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} V(x,T) = \max(x - X, 0), \\ V(0,T) = 0, \\ V(x,t) \to x, \quad x \to \infty, \end{cases}$$

cuya solución es:

$$V(x,T) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y - \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y,$$

con:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Para una opción europea de compra de las acciones de una fecha futura, las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} V(x,T) = \max(x - X, 0), \\ V(0,T) = X\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \\ V(x,t) \to 0, \quad x \to \infty \end{cases}$$

cuya solución es:

$$V(x,T) = \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy}$$

III. Análisis de datos

En las **Figuras 1** y **2** se observan las fluctuaciones de los precios de cierre diarios del periodo comprendido entre junio de 2013 y junio de 2016 de las acciones de Ecopetrol y Pacific Exploration, respectivamente (los datos para su construcción fueron obtenidos en la BVC).

Se puede deducir inicialmente, que las acciones de Pacific Exploration estuvieron más valorizadas con relación a las de Ecopetrol, con una diferencia de \$36600; al finalizar el periodo ambas empresas decayeron en 66.14% y 96.3%, respectivamente. Las acciones de Pacific Exploration alcanzaron un máximo de \$41620 y un mínimo de \$1080, manteniendo en este último mes un precio de \$1505. Asimismo, Ecopetrol se encontró con un máximo de \$4590 y un mínimo de \$881, mostrando que tales acciones crecen lentamente con el paso de los últimos días y se mantienen por debajo del precio máximo alcanzado.

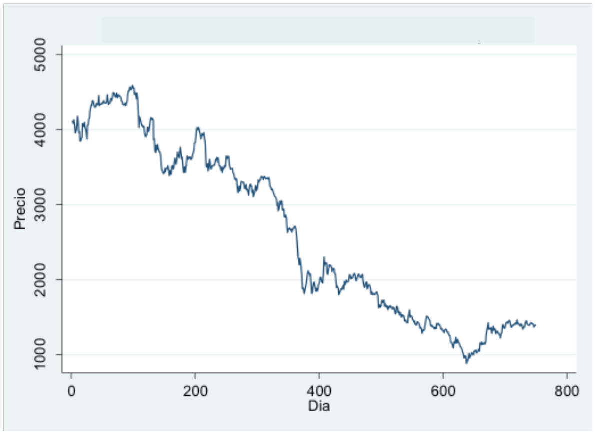

Figure 1. Daily Closing Price of Ecopetrol shares / Precio de cierre diario de las acciones de Ecopetrol

Black-Scholes model. It is necessary to know the boundary conditions that define the type of option in consideration. For example, the boundary conditions for a European option that sell the shares at a future date are shown as:

$$\begin{cases} V(x,T) = \max(x - X, 0), \\ V(0,T) = 0, \\ V(x,t) \to x, \quad x \to \infty, \end{cases}$$

whose solution is:

$$V(x,T) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy} - \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy},$$

with:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

The boundary conditions for a European option that buy the shares of a future date are shown below:

$$\begin{cases} V(x,T) = \max(x - X, 0), \\ V(0,T) = X\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \\ V(x,t) \to 0, \quad x \to \infty \end{cases}$$

whose solution is:

$$V(x,T) = \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{dy}$$

III. Data analysis

Figures 1 and **2** present the fluctuations in daily closing prices for the period from June 2013 to June 2016 of Ecopetrol and Pacific Exploration shares, respectively (data were obtained from the BVC).

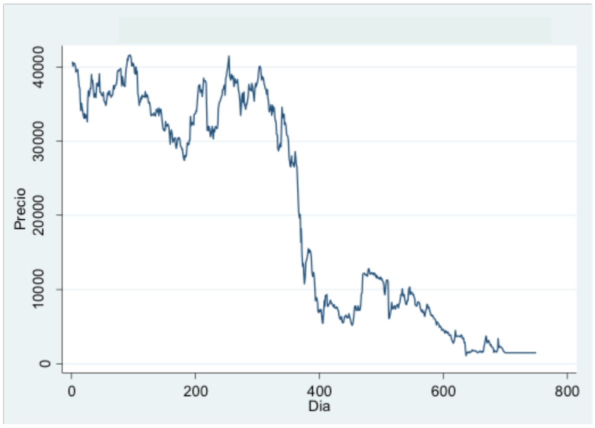

Figure 2. Daily Closing Price of Pacific Exploration shares / Precio de cierre diario de las acciones de Pacific Exploration

Table 1. Descriptive statistics of the daily closing prices of Ecopetrol and Pacific Exploration shares / Estadístico descriptivo de los precios de cierre diarios de las acciones de Ecopetrol y Pacific Exploration

Descriptive / *Descriptivo*		Ecopetrol Statistical / *Estadístico*	Ecopetrol Standard error / *Error típico*	Pacific Statistical / *Estadístico*	Pacific Standard error / *Error típico*
Average / *Media*		2608,17	2608,17	20267,76	540,816
Confidence interval for the 95% mean / *Intervalo de confianza para la media al 95%*	Lower limit / *Límite inferior*	2525,63	2525,63	19206,06	
	Upper limit / *Límite superior*	2690,70	2690,70	21329,46	
Average cut to 5% / *Media recortada al 5%*		2592,09	2592,09	20199,82	
Median / *Mediana*		2197,50	2197,50	15050,00	
Variance / *Varianza*		1325695,998	1325695,998	2,194E8	
Standard deviation / *Desviación típica*		1151,389	1151,389	14810,867	
Minimum / *Mínimo*		881	881	1080	
Maximum / *Máximo*		4590	4590	41620	
Range / *Rango*		3709	3709	40540	
Interquartile range / *Amplitud intercuartil*		2168	2168	29105	
Asymmetry / *Asimetría*		,187	,187	,027	,089
Curtosis		-1,501	-1,501	-1,780	,178

It is possible to deduce that Pacific Exploration's shares were more valued in relation to those of Ecopetrol, with a difference of \$ 36,600. At the end of the period both companies declined by 66.14% and 96.3%, respectively. Pacific Exploration's shares reached a maximum of \$ 41,620 and a minimum of \$ 1080, standing a price of \$ 1505 in the last month. Also, Ecopetrol found a maximum of \$ 4590 and a minimum of \$ 881, showing that these shares grow slowly in the last days and remaining below the maximum price reached.

Through a comparison of descriptive statistics on **Table 1**, Pacific's average price is greater than Ecopetrol with a difference of \$ 17,659.59. However it is not a reliable statistic since both present a positive asymmetry in the distribution of the data. Also, Pacific has a greater variability in its data with respect to Ecopetrol, which means to have data farther from its mean. Thus, it presents a greater number of increasing and decreasing jumps compared to Ecopetrol, as shown in **Figures 1** and **2**.

IV. Results

Given the Black-Scholes model,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+rx\frac{\partial V}{\partial x}-rV=0\,,$$

it is necessary to calculate parameters values σ, r, and K, x and T can be established in a free way, in order to forecast the price of the option and to establish significant differences between these companies. Note that σ

Comparando sus estadísticos descriptivos, dados en la **Tabla 1**, el promedio de los precios de Pacific es mayor que Ecopetrol con una diferencia de \$17659.59, mas no es un estadístico confiable puesto que ambas presentan una asimetría positiva en la distribución de los datos. Asimismo, se puede observar que Pacific tiene una mayor variabilidad en sus datos con respecto a Ecopetrol, lo que conlleva a tener datos más alejados de su media, y por tanto, a presentar un mayor número de saltos crecientes y decrecientes en comparación con Ecopetrol, como se observa en las **Figuras 1** y **2**.

IV. Resultados

Dado el modelo de Black-Scholes,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+rx\frac{\partial V}{\partial x}-rV=0\,,$$

es necesario calcular el valor de sus parámetros σ, r, y K, x y T se pueden establecer de manera libre, con el fin de pronosticar el precio de la opción en cuestión y poder establecer diferencias significativas entre dichas empresas. Observamos que σ debe ser calculada para cada una de las bases de datos suministrada, tanto de Ecopetrol, como de Pacific Exploration. Además, para cada una de las empresas se obtendrá el valor de una opción fijando cuatro parámetros y variando uno de ellos; esto nos permitirá ver el comportamiento del precio de la opción y establecer diferencias. Finalmente, se tomará, como precio del subyacente, uno de esos valores de los datos recopilados para cada una de las empresas y proponer una fecha de vencimiento T de tal forma que el precio de la acción en T sea conocida y así poder determinar cuál de las dos empresas es conveniente establecer un contrato, además de saber cuánto se hubiese ganado (o perdido) por la realización del contrato opción.

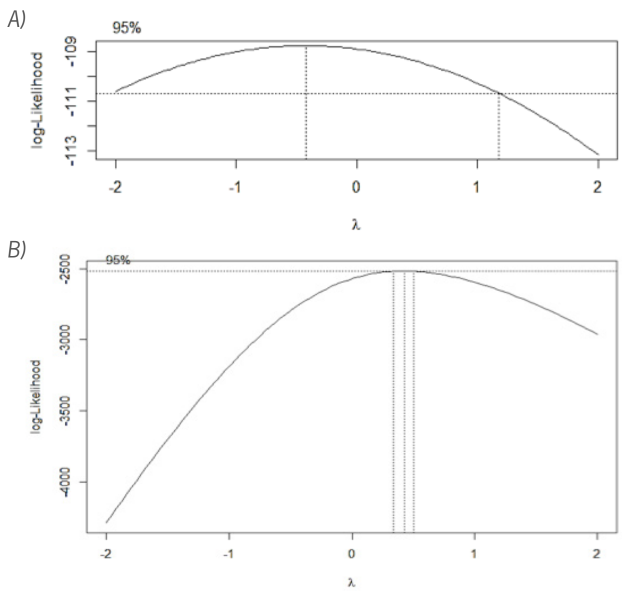

Figure 3. λ estimation for date belonging to: a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration / Estimación de λ para los datos de: a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration

Suponemos una tasa libre de interés anual dada por r=2% que llevado a una tasa de interés diaria da como resultado r=0,072%; ademas suponemos que el precio de ejercicio K se tomará como K=x±$2. Por otro lado, para calcular el valor de la volatilidad ligada a los precios diarios de dichas acciones es necesario aplicar una transformación Box-Cox, dependiendo de un estadístico λ, para que los datos sigan una distribución normal. Observando la **Figura 3**, tenemos que el valor máximo de λ para los datos de Ecopetrol y Pacific Exploration son λ=-0.42 y λ=0,5, respectivamente.

Al realizar la transformación a los datos, como en la **Figura 4**, se observa una minimización de la varianza, que conlleva a que cumplan el principio de normalidad cuando se estudian nuevamente los residuales de ambas empresas y garantizar la aplicabilidad del modelo Black-Scholes, como se observa en la **Figura 5**.

must be calculated for each database, both by Ecopetrol and Pacific Exploration. In addition, for each company is necessary to obtain the value of an option through a fixation of four parameters and variation of one of them. Hence, it is possible to see the behavior of the option price as well as to establish differences. Finally, one of these values from the data collected is taken as the price of the underlying, likewise an expiration date. The above in order to know the price of the share T. As a result, it is easy to determine which company is convenient to establish a contract. In addition, it is possible to know how much had won (or lost) by the completion of the option contract.

This study assumes an annual free interest rate given by$r$=2 that carried at a daily interest rate gives as a result r=0,072. Also, it supposes that the strike price K will be taken as K=x±$2. Nevertheless, volatility value linked to the daily prices of these shares can be calculated through a Box-Cox transformation. In order to follow a normal distribution, data should depends on a statistic λ. In **Figure 3**, the maximum value of λ for Ecopetrol y Pacific Exploration are λ=-0.42 y λ=0,5, respectively.

Through a performance of data transformation (**Figure 4**), it is possible to observe a minimization of the variance. Because residuals of both companies are studied and Black-Scholes model is guaranteed, the variance allows achieving the normality principle, as shown in **Figure 5**.

During the period under study, the historical volatility of the underlying asset is the standard deviation of transformed data. Hence, the historical volatility for Ecopetrol is given by σ_E=0.0003 and Pacific Exploration by σ_P=0.0465.

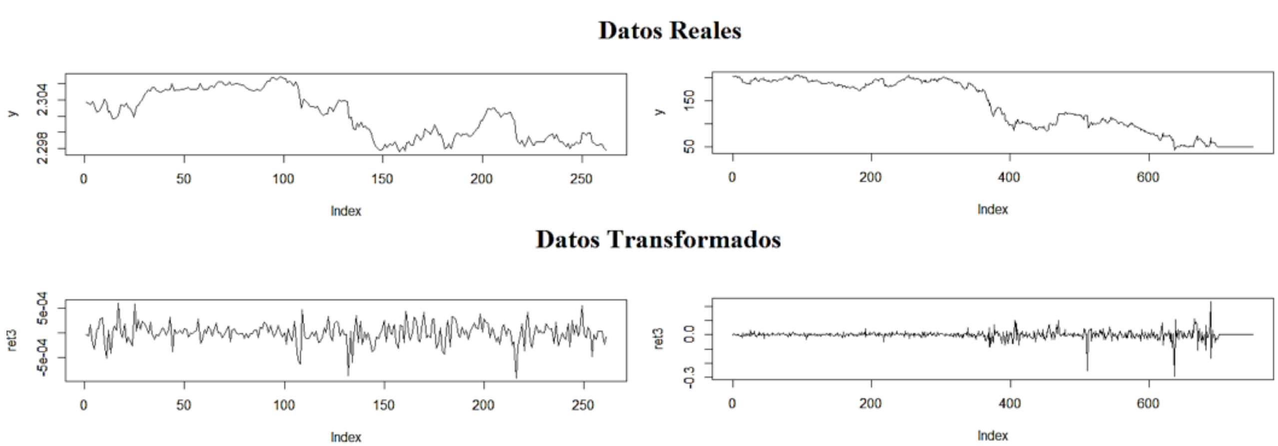

Figure 4. Real vs. Processed data belonging to: a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration / Datos reales vs transformados de: a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration

In order to illustrate the Black – Scholes model application with a programming code in R, it is possible to calculate the values of the options for both companies, V_E *(x,T)* and V_P *(x,T)*, respectively. Taking the above into account:

- the price of the European call option that has been determined belong only to one share. If the contract is for a fixed numberkof shares, the total price can be obtained by multiplyingc by the price of the European call option that was calculated for the case of an action, taking into account that the strike price is given by *cK*;
- if the number of shares fixed in the option isc, with $x^{\wedge} = cK$ (the new price of the underlying asset), but the strike price is not given by *cK*, these new values are replaced in the Black-Scholes equation in order to determine the new price of the European call option.

¿How much is actually won or lost by a European call option? Suppose you want to buy a European call option with underlying asset for the shares of Ecopetrol and Pacific Exploration. The contract is established on the first day of operations in the BVC, in our case in June 2013, on that day, the stock price was *x*=$4120 and *x*=$41900, respectively. The contract is established for one year *T*=1, with a Strike price of K_E=$2120 and K_P=$39900, also the volatility estimated is σ_E=0.0003, σ_P=0.0465 , and a risk-free interest rate of *r*=0.07214344608. The payable prices for these options are 2147.55 for Ecopetrol and $4779.67 for Pacific. Once the expiration date of the option arrives, the owner of the option decides whether or not to apply this contract; It is realized that the price of the action is $ 3480 for Ecopetrol and $ 37460 for Pacific Rubiales, the first price corresponding to the month of June 2014.

V. Conclusions

A Black – Scholes model application has been made to the closing prices fluctuations of both companies Ecopetrol and Pacific Rubiales, from June 2013 to June 2016.

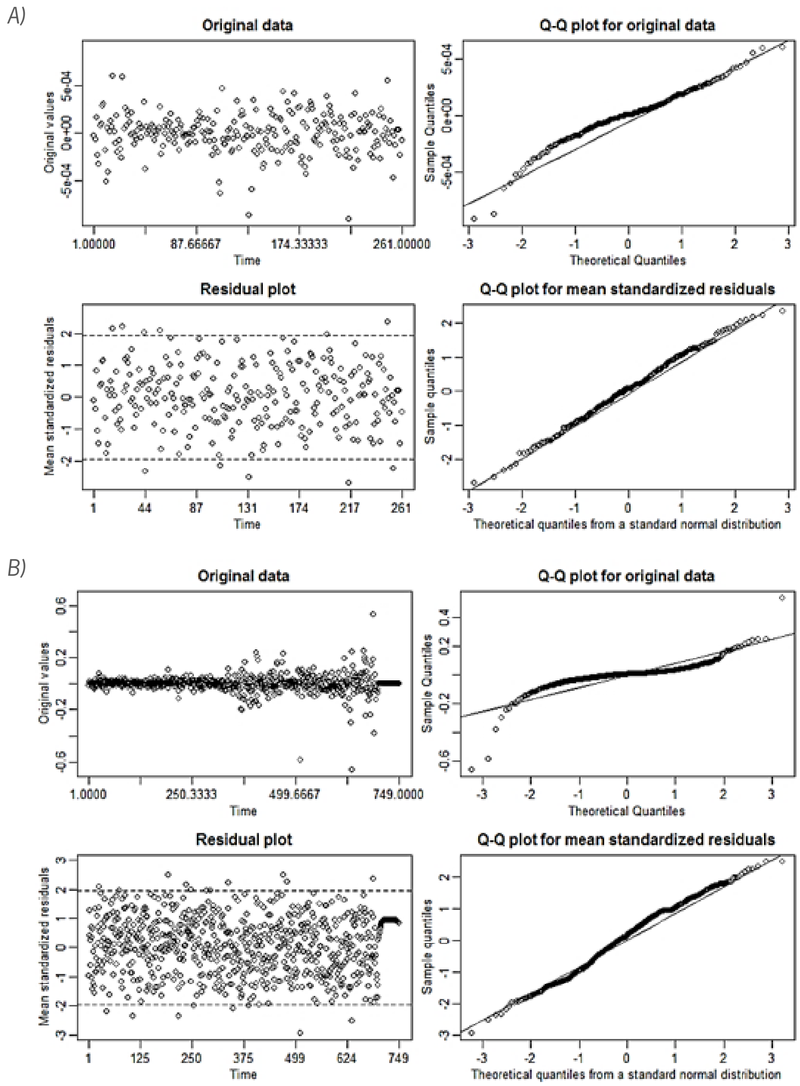

Figure 5. Processed date residuals belonging to: a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration / Residuales de los datos transformados de a) Ecopetrol, b) Pacific Exploration

La volatilidad histórica del activo subyacente para el periodo en estudio de ambas empresas es la desviación estándar de los datos transformados. Luego, la volatilidad histórica para Ecopetrol está dada por σ_E= 0.0003 y la de Pacific Exploration por σ_P= 0.0465.

Para ilustrar la aplicación del modelo de Black - Scholes, utilizando un código de programación en R, para calcular los valores de las opciones de las dos empresas, V_E *(x,T)* y V_P *(x,T)*, respectivamente, observe lo siguiente:

- el precio de la opción call europea que se ha determinado es solo para una acción, si el contrato es para un número fijo k de acciones, entonces el precio total se obtiene multiplicando c por el precio de la opción call europea que se calculó para el caso de una acción, teniendo en cuenta que el precio strike viene dado por *cK*;
- si el número de acciones que se fijan en la opción es c, con $x^{\wedge} = cK$ (el nuevo precio del activo subyacente), pero el precio strike no está dado por *cK*, entonces, se sustituyen estos nuevos valores en la ecuación de Black-Scholes para determinar el nuevo precio de la opción call europea.

¿Cuánto se gana o se pierde, realmente, por una opción call europea? Suponga que se quiere comprar una opción call europea con activo subyacente para las acciones de Ecopetrol y Pacific Exploration. El contrato se establece el primer día en que efectúa operaciones en la BVC, en nuestro caso en junio de 2013, en ese día, el precio de las acciones fue x=\$4120 y x=\$41900, respectivamente. El contrato se establece a un año T=1, con un precio Strike de K_E=\$2120 y K_P=\$39900, además se estima que la volatilidad es σ_E= 0.0003, σ_P= 0.0465 y una tasa de interés libre de riesgo de r=0.07214344608. Los precios a pagar por dichas opciones son 2147.55 para Ecopetrol y \$4779.67 para Pacific. Ya llegada la fecha de vencimiento de la opción, el propietario de esta decide si ejerce o no dicho contrato; se da cuenta que el precio de la acción es de \$3480 para Ecopetrol y \$37460 para Pacific Rubiales, primer precio correspondiente al mes de Junio de 2014.

V. Conclusiones

Se ha realizado una aplicación del modelo de Black - Scholes a las fluctuaciones de las acciones de los precios de cierre de las empresas Ecopetrol y Pacific Rubiales durante el periodo junio de 2013 a junio de 2016, el cual solo determina los valores de sus opciones a futuro, mas no pronostica el precio de sus acciones para un tiempo T.

Al analizar el comportamiento de los parámetros que influyen el modelo con relación al precio de la opción, se deduce que, al aumentar el tiempo de pronóstico, el precio de la opción aumenta; al aumentar el precio de la acción, el valor de la opción tiende a disminuir; cuando la volatilidad aumenta, el precio de la opción aumenta; y finalmente, el precio de la opción aumenta, cuando la tasa de interés aumenta.

Con relación al comportamiento de las fluctuaciones de las empresas, para así analizar sus diferencias y poder determinar cuál de las dos tiene un mejor pronóstico al momento de invertir, tenemos dos opciones:

- si el valor de la acciones de ambas empresas analizadas es igual, entonces el precio de la opción de Pacific es mayor que la de Ecopetrol, puesto que su volatilidad es mucho mayor que la otra; y
- si el precio de la acción difiere de la una a la otra, las ganancias o pérdidas en las opciones para tomar después la mejor decisión financiera depende del valor de K, esto es, si $x(T)\geq K$, donde $x(T)$ es el precio de la acción futura conocida, conviene ejercer la opción, implica una ganancia por la compra del subyacente de $x(T)-K$. Si se toma en cuenta lo que se paga por la opción pero llevada a valor futuro T, entonces, se gana realmente (o posiblemente sea perdida) $x(T)-K-V(x(t),T)e^{rT}$. Por otra parte, si $K < x(T)$, no conviene ejercer la opción, lo cual implica una pérdida de $V(x(t),T)e^{rT}$ por la compra de dicho contrato.

En el estudio se comprueba que, al momento de compra de una opción, el riego existe en ambas empresas, en este caso, para el periodo analizado, Pacific presenta una menor proporción de riesgo con relación a Ecopetrol. S&T

These companies determinate the value of its option to a long term, but does not forecast the price of its shares for a time T.

Through a behavior analysis of the parameters that influence the model in relation to the price of the option, when the forecast time increases, the price of the option also increases. However, as the share price increases, the value of the option tends to decrease. Finally, when volatility and interest rate increase, the price of the option increases.

Regarding to the behavior of the companies fluctuations, there are two options that allow to analyze their differences and also to determine which of the two has a better forecast when investing:

- if the value of the shares of both companies analyzed is equal, then the price of the Pacific option is greater than that Ecopetrol, since its volatility is much greater than the other; and
- if the price of the stock of both companies is different, the earns or losses to take the best financial decision depends on the value of K. That is $x(T)\geq K$, where x(T) is the price of the known future stock. Thus, it is convenient to apply the option and it implies an earn due to the purchase of an underlying $x(T)-K$. It is taking into account what is paid for the option but in a future valueT, then, it is currently possible to earn (or maybe loss) $x(T)-K-V(x(t),T)e^{rT}$. On the other hand, if $K<x(T)$, it is not convenient to apply the option. The above implies a loss of $V(x(t),T)\ e^{rT}$ due to the purchase of this contract.

The currently study shows that, at the time of an option purchase, risk exists in both companies. In this case, during the period analyzed, Pacific has a lower proportion of risk than Ecopetrol. S&T

References / Referencias

Castillo B. (2012). *El modelo de Black-Scholes de valoración de opciones financieras* [tesis]. Universidad de Barcelona: España.

Elliott, R.J. & Kopp, P.E. (1999). *Mathematics of financial markets.* New York, NY: Springer.

Farlow, S. (1993). *Partial differential equations.* New York, NY: Dover.

Garcia, J.A. (2008). *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita* [5a ed.]. Bogotá, Colombia: Pearson.

Kozikowski, Z. (2007). *Matemáticas financieras: el valor del dinero en el tiempo.* México DF: McGraw-Hill.

Serrano, J. & Villareal, J. (1993). *Fundamentos de finanzas* [2a ed.]. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.

CURRICULUM VITAE

Álvaro Javier Cangrejo, MSc(c). Mathematician from the Universidad Surcolombiana (Neiva, Colombia) and candidate to Master in Statistics at the Universidad del Valle (Cali, Colombia) / Matemático de la Universidad Surcolombiana (Neiva, Colombia) y candidato a Máster en Estadística en la Universidad del Valle (Cali, Colombia).

Christian Camilo Cortes. Mathematician from the Universidad Surcolombiana (Neiva, Colombia) and Master in Mathematics from the Universidade Federal de Minas Gerais (Belo Horizonte, Brasil) / Matemático de la Universidad Surcolombiana (Neiva, Colombia) con Maestría en Matemáticas de la Universidade Federal de Minas Gerais (Belo Horizonte, Brasil).